INVESTIGAÇÕES SOBRE FUNÇÕES LUCRO DE 3º GRAU GENÉRICA: PONTOS DE EQUILÍBRIO E DE LUCROS MÁXIMO E MÍNIMO

INVESTIGATIONS ON GENERIC 3RD ORDER PROFIT FUNCTIONS: BALANCE, MAXIMUM AND MINIMUM POINTS

Prof. Pós-Dr. Diógenes Bosquetti – prof_diogenes@yahoo.com.br
Prof. Dr. Péricles Bosquetti - pericles.bosquetti@fatec.sp.gov.br
Prof. Dr. Maurício Angeloni – mauricio.angeloni@fatec.sp.gov.br
Prof. Pós-Dr. Omar Maluf – omar.maluf@fatec.sp.gov.br
Faculdade de Tecnologia (FATEC) de Sertãozinho – SP – Brasil

Profa. Mestra Roberta Ângela da Silva – zelinha83@yahoo.com.br
Faculdade de Tecnologia (FATEC) de Sertãozinho – SP – Brasil
Faculdade de Tecnologia (FATEC) de Taquaritinga – SP – Brasil
Faculdade de Tecnologia (FATEC) de Bebedouro – SP – Brasil

RESUMO

Uma generalização da função lucro é estudada, considerando que a mesma possa ser expressa por função polinomial do terceiro grau $L(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com coeficientes reais “a”, “b”, “c” e “d” arbitrários e “a” não nulo. Neste cenário, uma dada função lucro poderá conter pontos de máximo e mínimo local, sendo sua região de validade investigada. A ordem de aparecimento dos pontos de máximo e mínimo local varia de acordo com o sinal do parâmetro “a”. Para $a > 0$, o ponto de máximo precede o de mínimo local, sendo tal ordem invertida para $a < 0$. Igualmente se considera os comportamentos da função lucro quando a mesma está submetida a restrição adicional que diz que o parâmetro “x”, o qual é o alicerce da função lucro só poderá assumir valores positivos ou nulos. Igualmente são investigados os pontos de equilíbrio desta função, a qual a ocorrem quando a função receita R(x) e a função custo C(x) se equivalham.

Palavras-chave: Administração. Gestão Financeira. Matemática. Funções. Polinômios.

ABSTRACT

A generalization of the profit function is studied, considering that it can be expressed by polynomial function of the third degree $L(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, with real coefficients "a", "b", "c" and "d" arbitrary and "a" not null. In this scenario, a given profit function may contain local maximum and minimum points, and their validity region is investigated. The order of appearance of the local maximum and minimum points varies according to the signal of parameter "a". For a> 0, the maximum point precedes the local minimum, such order being inverted for a <0. Likewise, the behavior of the profit function is considered when it is subjected to the additional constraint that says that the parameter "x", the what is the foundation of the profit function can only assume positive or zero values. Also the equilibrium points of this function are investigated, which occur when the revenue function R (x) and cost function C(x) are equal.

Keywords: Administration. Financial management. Mathematics. Functions. Polynomials.

1 INTRODUÇÃO

Toda empresa privada tem por finalidade a geração de riquezas mediante ações que realizem não somente o pagamento de todos os encargos e custos de produção e comercialização como produzir um excedente financeiro aqui definido como função lucro “L(x)” (SILVA, 2018). Esta grandeza é definida como sendo a diferença entre as funções receita “R(x)” e custo “C(x)”:

$$L(x) = R(x) - C(x) \tag{1}$$

O parâmetro “x” é tomado como alicerce e referência para o modelamento matemático de todas estas funções, sendo seu significado real variável caso a caso. Usualmente a função lucro se apresenta como uma função polinomial do 2º grau:

$$L(x) = bx^2 + cx + d \tag{2}$$

onde “b”, “c”, “d” são coeficientes independentes de “x” (OLIVEIRA, 2016). Tendo em vista que o coeficiente “b” multiplica o termo de maior potência em “x”, o mesmo não pode se anular. A função polinomial do segundo grau apresenta um comportamento parabólico cuja concavidade depende do sinal do parâmetro “b”. Se b > 0 a concavidade será positiva e haverá um único ponto de mínimo global. Se b < 0 a concavidade será negativa e haverá um único ponto de máximo global. A condição de equilíbrio, a qual R(x) = C(x), se existir, é obtida pela fórmula de Báskara:

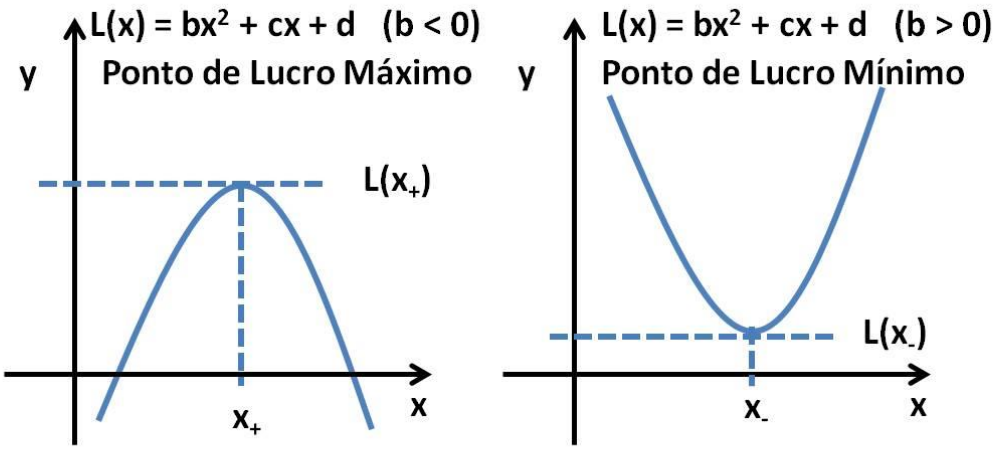
$$x_{eq\,\pm} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4bd}}{2b} \tag{3}$$

Sendo $c^2 - 4bd \geq 0$ a condição para sua existência. Os pontos de máximo ou mínimo globais “$x_\pm$” ocorrem no vértice da parábola, sendo seus respectivos valores dados por:

$$x_\pm = -\frac{c}{2b} \quad \text{e} \quad L(x_\pm) = d - \frac{c^2}{4b} \tag{4}$$

A restrição usual existente no parâmetro “x”, obrigando-o a assumir valores positivos ou nulo, faz com que exista a necessidade de que se c < 0, então b > 0 ou se c > 0, então b < 0. Tais situações são corriqueiras e encontradas em diversos casos na literatura.

Figura 1 – Pontos de Máximo (caso em que b < 0) ou Mínimo (caso em que b > 0) associados a uma determinada função lucro L(x) matematicamente modelada por um polinômio de segundo grau



Fonte: elaborada pelos autores

Em um cenário mais competitivo e incerto, onde os lucros e/ou prejuízos em uma empresa podem assumir dimensões maiores do que a usual, “L(x)” pode ser modelada por uma função polinomial de grau mais elevado do que o anteriormente discutido. Introduzindo o parâmetro não nulo “a”, a função lucro pode ser matematicamente descrita como:

$$L(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (5)$$

Os parâmetros “a”, “b”, “c” e “d” são todos independentes de “x”, existindo agora a possibilidade de o coeficiente “b” poder se anular. Considerando o comportamento matemático de um polinômio de terceiro grau, os pontos de máximos e mínimos são locais e não globais como no caso de um polinômio de segundo grau (MATHCENTRE, 2009). Isto pois, nos limites em que o parâmetro $x \rightarrow \pm \infty$ a função lucro $L(x) \rightarrow \pm \infty$ para $a > 0$ e $\mp \infty$ para $a < 0$. Tais limites, obviamente ultrapassam os valores de lucro máximo e mínimo locais. A condição de equilíbrio, a qual R(x) = C(x), se existir, é obtida pelas raízes reais da equação de terceiro grau (TAVARES, 2010). A quantidade de valores de equilíbrio dependerá do discriminante “Δ”, definido como:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \tag{6}$$

Onde os coeficientes “p” e “q” são expressos por combinações específicas dos coeficientes “a”, “b”, “c” e “d”, todos associados à função lucro:

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \tag{7}$$

$$q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3} = \frac{d}{a} - \frac{b}{3a}\left(p + \frac{b^2}{9a^2}\right) \tag{8}$$

Se $\Delta = 0$ a condição de equilíbrio da função lucro acontecerá em dois pontos distintos “$x_{eq\ 1}$” e “$x_{eq\ 2}$”a saber:

$$x_{eq\ 1} = -\frac{b}{3a} - 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad \text{e} \quad x_{eq\ 2} = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \tag{9}$$

Se $\Delta > 0$ a condição de equilíbrio da função lucro acontecerá em apenas um ponto “$x_{eq\ 3}$”, descartando-se as soluções complexas:

$$x_{eq\ 3} = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \tag{10}$$

Se $\Delta < 0$ a condição de equilíbrio da função lucro acontecerá em três pontos distintos “$x_{eq\ 4}$”, “$x_{eq\ 5}$”, e “$x_{eq\ 6}$”, a seguir apresentados:

$$x_{eq\ 4} = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{|\Delta|}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{|\Delta|}} \tag{11}$$

$$x_{eq\ 5} = -\frac{b}{3a} + \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{q}{2} - i\sqrt{|\Delta|}} + \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{|\Delta|}} \tag{12}$$

$$x_{eq\ 6} = -\frac{b}{3a} + \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{q}{2} - i\sqrt{|\Delta|}} + \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{|\Delta|}} \tag{13}$$

Ainda que matematicamente exista pelo menos um ponto de equilíbrio, na prática devemos considerar se tal ponto está contido no intervalo sob investigação em uma dada empresa.

2 ESTUDOS DOS PONTOS DE LUCRO MÁXIMO E MÍNIMO LOCAL

Os pontos de lucro máximo e mínimo locais, aqui designados por “$x_{\pm}$”, são pontos de grande importância para uma empresa, estabelecendo referências sobre as lucratividades dos produtos e serviços ofertados pela empresa. Para isto, calculam-se as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem na variável “x” (SODRÉ, 2006; SODRÉ, 2006a):

$$\partial_x L(x) = 3ax^2 + 2bx + c \; ; \quad (14)$$

$$\partial_x^2 L(x) = 6ax + 2b; \quad (15)$$

$$\partial_x^3 L(x) = 6a \; ; \quad (16)$$

Os valores da grandeza “x” associados aos lucros máximo e mínimo locais são encontrados utilizando-se o teste das derivadas primeira e segunda para “$L(x)$”. Assim procedendo, temos:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \quad (17)$$

A existência de pontos “$x_{\pm}$” ocorre em duas condições distintas: (i) Ou quando o produto dos coeficientes “a” e “c” são tais que $ac < 0$, ou então, (ii) quando o produto $ac > 0$ e o coeficiente “b” é tal que $b^2 \geq 3ac$. Na condição particular $b^2 = 3ac$ o teste da derivada segunda é inconclusivo, necessitando assim o uso da derivada de terceira ordem da função lucro. Neste caso, a função lucro ou apresentará um valor máximo (para a < 0) ou um máximo local (para a > 0).

Os valores do lucro máximo “$L(x_+)$” e mínimo “$L(x_-)$” locais são dados pela expressão:

$$L(x_{\pm}) = \frac{b(2b^2 - 9ac) \pm 2(b^2 - 3ac)^{3/2}}{27a^2} + d \quad (18)$$

No caso particular em que $b^2 = 3ac$, temos que:

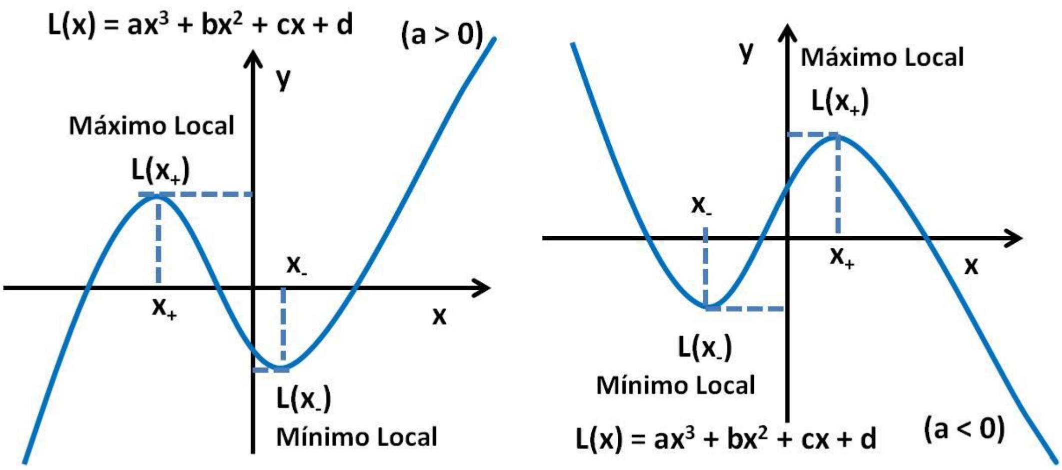
$$L(x_+) = L(x_-) = -\frac{bc}{9a} + d \quad (19)$$

E a diferença entre estes valores é:

$$L(x_+) - L(x_-) = \frac{4(b^2 - 3ac)^{3/2}}{27a^2} \quad (20)$$

A ordem de aparecimento dos pontos de máximo e mínimo locais depende do sinal do coeficiente “a”. Se a < 0, aparecerá primeiramente o mínimo local e, depois, o máximo local. Se a > 0, a ordem dos máximo e mínimo local se inverte (SAMPAIO, 2018).

Figura 2 – A ordem dos pontos de máximo e mínimo locais aparece de acordo com o sinal do coeficiente “a”. Para valores positivos de “a”, ou seja, quando a > 0, o ponto de máximo aparece primeiramente, seguido do ponto de mínimo local. Para a < 0, a ordem é invertida.



Fonte: elaborada pelos autores

3 REGIÃO DE VALIDADE DOS VALORES DE LUCRO MÁXIMO E MÍNIMO LOCAIS

Conforme destacado anteriormente, uma função de terceiro grau apresenta máximo e mínimo local e não global. Desta forma, faz-se mister encontrar o intervalo de valores de “x” onde os máximos e mínimos locais são válidos, ou seja, não são ultrapassados pela natural desenvoltura da função de terceiro grau. Partindo-se da igualdade

$$L(\alpha_{\pm}) = L(x_{\pm}) \tag{21}$$

sendo “$\alpha_{\pm}$” são os pontos associados ao parâmetro “x” o qual apresentam, respectivamente, os mesmos valores numéricos dos pontos de máximo ou mínimo local “$x_{\pm}$”, encontramos a seguinte equação do terceiro grau:

$$\alpha_{\pm}^3 + \frac{b}{a}\alpha_{\pm}^2 + \frac{c}{a}\alpha_{\pm} + \left[\frac{d - L(x_{\pm})}{a}\right] = 0 \tag{22}$$

O termo quadrático da equação anterior pode ser eliminado através da mudança de variável $\alpha_{\pm} = \mathrm{t}_{\pm} - b/3a$, resultando na seguinte equação de terceiro grau reduzida:

$$t_{\pm}^3 + p\,\mathrm{t}_{\pm} + \tilde{\mathrm{q}}_{\pm} = 0 \tag{23}$$

A quantidade “p” é descrita pela equação (7) e

$$\tilde{q}_{\pm} = q - L(x_{\pm})/a \tag{24}$$

Substituíndo a expressão para "q" e "$L(x_{\pm})$", respectivamente as equações (8) e (18), a expressão para "$\tilde{q}_{\pm}$" torna-se equivalente a:

$$\tilde{q}_{\pm} = \mp \frac{2}{27a^3}(b^2 - 3ac)^{3/2} \tag{25}$$

Dentre as possíveis soluções da equação de terceiro grau, ressalta-se aquela em que a mesma apresente três raízes reais, sendo duas iguais. Este caso ocorre toda vez que o discriminante "$\tilde{\Delta}$" se anula, sendo este último definido por:

$$\tilde{\Delta} = \sqrt{\frac{\tilde{q}_{\pm}^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{q_{\pm}^2}{4} + \frac{p^3}{27} - \frac{qL(x_{\pm})}{2a} + \frac{L^2(x_{\pm})}{4a^2}} \tag{26}$$

Uma vez que $\tilde{\Delta} = 0$, a seguinte relação entre as quantidades "p" e "$\tilde{q}_{\pm}$" é estabelecida:

$$p = -3(\tilde{q}_{\pm}/2)^{2/3} = c/a - b^2/3a^2 \tag{27}$$

Os pontos associados ao parâmetro "x" que apresentam os mesmos valores de "$L(x_{\pm})$" para a função lucro são:

$$\alpha_{\pm}^{(1)} = -b/3a - 2(\tilde{q}_{\pm}/2)^{1/3} \tag{28}$$

$$\alpha_{\pm}^{(2)} = -b/3a + (\tilde{q}_{\pm}/2)^{1/3} \tag{29}$$

Utilizando a equação (25) para "", os valores de "$\alpha_{\pm}^{(1)}$" e "$\alpha_{\pm}^{(2)}$" podem ser reescritos como:

$$\alpha_{\pm}^{(1)} = -b/3a \pm 2\,(b^2 - 3ac)^{1/2}/3a \tag{30}$$

$$\alpha_{\pm}^{(2)} = -b/3a \mp (b^2 - 3ac)^{1/2}/3a \tag{31}$$

Pela comparação entre as equações (31) e (17), concluímos que $\alpha_{\pm}^{(2)} = x_{\pm}$. A diferença entre os referidos pontos é tal que:

$$\alpha_{\pm}^{(1)} - x_{\pm} = -3(\tilde{q}_{\pm}/2)^{1/3} = \pm\,(b^2 - 3ac)^{1/2}/a \tag{32}$$

Desta forma, para valores positivos do coeficiente "a", temos:

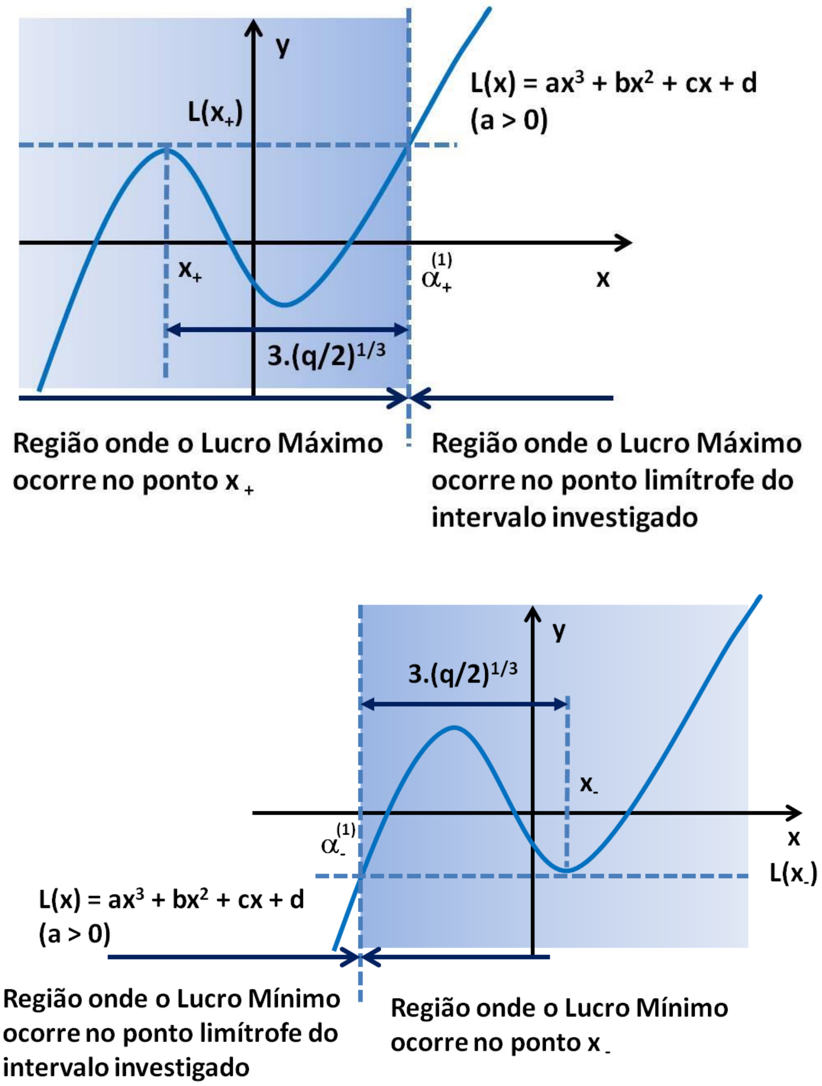
$$\alpha_{\pm}^{(1)} = x_{\pm} \pm (b^2 - 3ac)^{1/2}/a \tag{33}$$

Para valores negativos do coeficiente "a":

$$\alpha_{\pm}^{(1)} = x_{\pm} \mp (b^2 + 3|a|c)^{1/2}/|a| \tag{34}$$

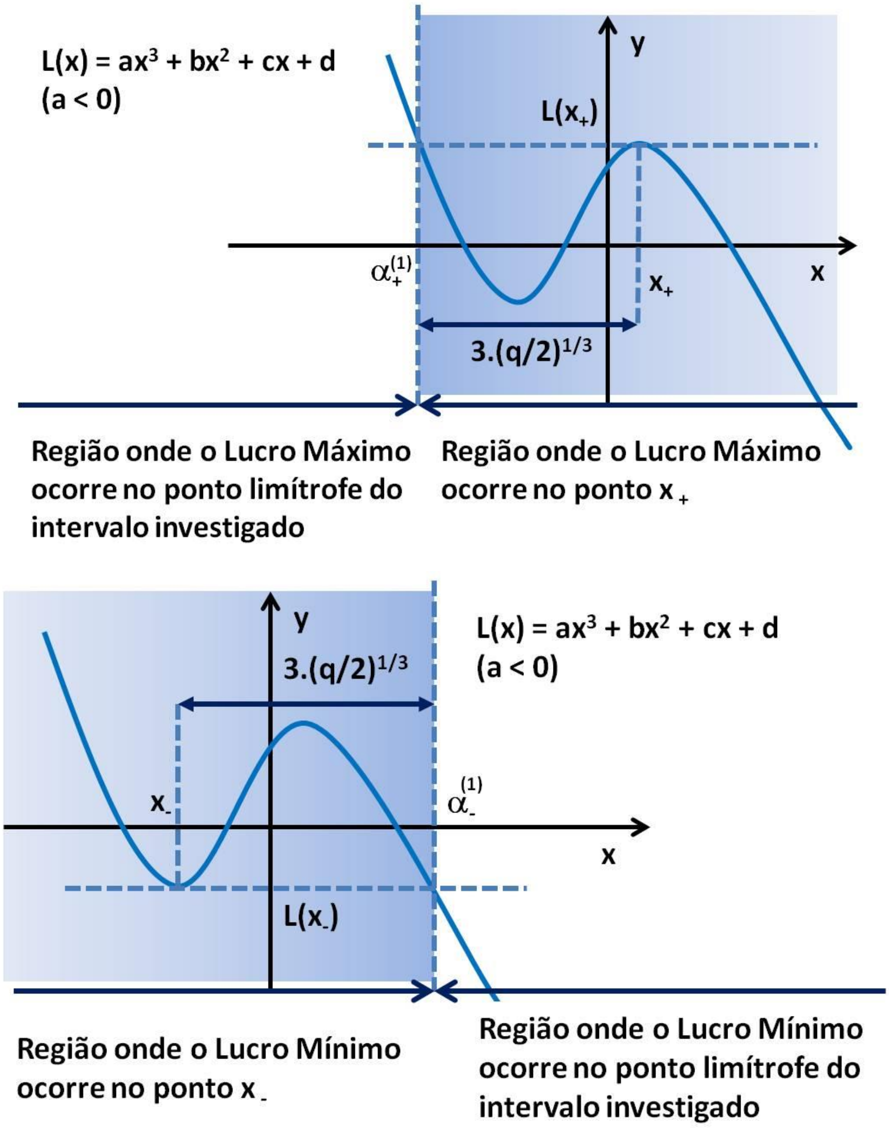
Para a > 0, o ponto de lucro máximo aparece antes do lucro mínimo local de forma que o lucro máximo local prevalece sobre os demais valores de L(x) no semi-plano x < $\alpha_{+}^{(1)}$ enquanto que o lucro mínimo local fornece o menor valor para L(x) no semi-plano x >$\alpha_{-}^{(1)}$. Para a < 0 a ordem de aparecimento dos pontos de lucro máximo e mínimo se invertem. O lucro máximo local prevalece sobre os demais valores de L(x) no semi-plano x > $\alpha_{+}^{(1)}$ enquanto que o lucro mínimo local no intervalo x < $\alpha_{-}^{(1)}$.

Figura 3 – Para valores positivos do coeficiente "a", o ponto de lucro máximo aparece antes do lucro mínimo local. O lucro máximo local prevalece sobre os demais valores de L(x) para todo "x" tal que x < $\alpha_{+}^{(1)}$ enquanto que o lucro mínimo local fornece o menor valor para L(x) no intervalo x >$\alpha_{-}^{(1)}$.



Fonte: elaborada pelos autores

Figura 4 – Para valores negativos do coeficiente "a", o ponto de lucro mínimo aparece antes do lucro máximo local. O lucro máximo local prevalece sobre os demais valores de L(x) para todo "x" tal que x > $\alpha_{+}^{(1)}$ enquanto que o lucro mínimo local fornece o menor valor para L(x) no intervalo x < $\alpha_{-}^{(1)}$.



Fonte: elaborada pelos autores

No caso em que a quantidade "x" necessariamente deva ser maior ou igual a zero, restrições adicionais em relação aos pontos de lucro máximo e mínimo devem ser anotadas. Conforme visto anteriormente, a existência de "$x_{\pm}$" está condicionada a $b^2 - 3ac \geq 0$. Os pontos de lucro máximo e mínimo podem existir ou não, dependendo da combinação dos coeficientes "a", "b" e "c" e seus respectivos sinais. Uma vez que o coeficiente "a" não pode se anular e explicitando o caso dos valores negativos de "a" como sendo "$-|a|$", onde "$|a|$" é o módulo da grandeza "a", então, superpondo a condição x > 0 com a equação (17), obtemos que:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \geq 0, \qquad se\ \ a > 0 \tag{35}$$

$$x_{\pm} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 + 3|a|c}}{3|a|} \geq 0, \qquad se\ a < 0 \tag{36}$$

Os coeficientes "b" e "c" podem ser positivos, negativos ou nulos. Detalhando a análise anterior também para o parâmetro "c", as equações (35) e (36) se estendem para:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \geq 0, \qquad se\ \ a > 0, c > 0 \tag{37}$$

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm b}{3a} \geq 0, \qquad se\ \ a > 0, c = 0 \tag{38}$$

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 3a|c|}}{3a} \geq 0, \qquad se\ \ a > 0, c < 0 \tag{39}$$

$$x_{\pm} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 + 3|a|c}}{3|a|} \geq 0, \qquad se\ a < 0, c > 0 \tag{40}$$

$$x_{\pm} = \frac{b \mp b}{3|a|} \geq 0, \qquad se\ a < 0, c = 0 \tag{41}$$

$$x_{\pm} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 3ac}}{3|a|} \geq 0, \qquad se\ a < 0, c < 0 \tag{42}$$

Os valores negativos de "c" foram explicitados como "$-|c|$", onde "$|c|$" é o módulo deste parâmetro. Estendendo novamente a análise, agora considerando o parâmetro "b", verificamos que:

- **i.** Inexistem pontos de máximo e mínimo locais quando os coeficientes "a", "b" e "c" são todos simultaneamente positivos ou negativos;
- **ii.** Inexistem pontos de máximo e mínimo locais quando os coeficientes "a" e "c" são ambos simultaneamente positivos ou negativos e b = 0;
- **iii.** Quando "b" e "c"são simultaneamente nulos, então $x_+ = x_- = 0$, independentemente se o valor de "a" é positivo ou negativo;
- **iv.** Quando "a" e "b" são simultaneamente positivos e c = 0, então $x_+ = 0$ e inexiste "x_-". Quando "a" e "b" são simultaneamente negativos e c = 0, então $x_- = 0$ e inexiste "x_+";
- **v.** Quando b = 0, a > 0 e c < 0, inexiste "x_-" e

$$x_+ = \frac{\sqrt{3a|c|}}{3a} \tag{43}$$

De forma semelhante, a condição b = 0, a < 0 e c > 0, então inexiste "x_+" e

$$x_- = \frac{\sqrt{3|a|c}}{3|a|} \tag{44}$$

vi. Quando c = 0, a > 0 e b < 0, então "$x_- = 0$" e

$$x_+ = \frac{2|b|}{3a} \tag{45}$$

De forma semelhante, a condição c = 0, a < 0 e b > 0, então $x_+ = 0$ e

$$x_- = \frac{2b}{3|a|} \tag{46}$$

vii. Quando a > 0, b > 0 e c < 0, faz com que $x_- = 0$ e

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 3a|c|}}{3a} \tag{47}$$

De forma semelhante, a condição a < 0, b > 0 e c > 0, faz com que $x_+ = 0$ e

$$x_- = \frac{b + \sqrt{b^2 + 3|a|c}}{3|a|} \tag{48}$$

viii. Quando a > 0, b < 0 e c > 0, então

$$x_- = \frac{|b| - \sqrt{b^2 + 3ac}}{3a} \tag{49}$$

$$x_+ = \frac{|b| + \sqrt{b^2 + 3ac}}{3a} \tag{50}$$

ix. De forma semelhante, a condição a < 0, b > 0, c < 0, faz com que

$$x_+ = \frac{b - \sqrt{b^2 + 3ac}}{3|a|} \tag{51}$$

$$x_- = \frac{b + \sqrt{b^2 + 3ac}}{3|a|} \tag{52}$$

Desta forma, estudaram-se todas as possibilidades de variações dos parâmetros "a", "b" e "c" associado aos pontos de máximo e mínimo locais, quando ocorre a restrição x > 0.

Os valores de "$\alpha_\pm^{(1)}$" igualmente necessitarão se adaptar à restrição dos valores exclusivamente positivos do parâmetro "x". Neste caso, temos:

$$\alpha_\pm^{(1)} = x_\pm \pm \frac{1}{a}(b^2 - 3ac)^{1/2} \geq 0 \;\; se \;\; a > 0, b \neq 0, c > 0 \tag{53}$$

$$\alpha_\pm^{(1)} = x_\pm \pm \frac{1}{a}(b^2 + 3a|c|)^{1/2} \geq 0 \;\; se \;\; a > 0, b \neq 0, c < 0 \tag{54}$$

$$\alpha_\pm^{(1)} = x_\pm \pm \frac{1}{a}(3a|c|)^{1/2} \geq 0 \;\; se \;\; a > 0, b = 0, c < 0 \tag{55}$$

$$\alpha_\pm^{(1)} = x_\pm \mp \frac{1}{|a|}(b^2 + 3|a|c)^{1/2} \geq 0 \;\; se \;\; a < 0, b \neq 0, c > 0 \tag{56}$$

$$\alpha_{\pm}^{(1)} = x_{\pm} \mp \frac{1}{|a|}(b^2 - 3ac)^{1/2} \geq 0 \;\; se \;\; a < 0, b \neq 0, c < 0 \tag{57}$$

$$\alpha_{\pm}^{(1)} = x_{\pm} \mp \frac{1}{|a|}(3|a|c)^{1/2} \geq 0 \;\; se \;\; a < 0, b = 0, c > 0 \tag{58}$$

Evidentemente, a existência de "$\alpha_{\pm}^{(1)}$" está condicionada à condição $x_{\pm} \geq 0$.

4 CONCLUSÕES

A generalização da função lucro como uma função polinomial de terceiro grau abre um panorama distinto daquele usualmente apresentado na literatura, onde L(x) se apresenta ou com máximo ou com mínimo global. Para uma função lucro de terceiro grau, existe a possibilidade de haver máximos e mínimos locais, respeitado a condição de existência $b^2 - 3ac$ >0.

Considerando $L(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, o sinal do coeficiente "a" determina a ordem de aparecimento dos máximos e mínimos locais. Se a > 0, aparece primeiro o máximo e, em seguida, o mínimo local. Se a < 0, tal ordem se inverte. A distância entre estes dois máximos é dada pela quantidade $D = |x_+ - x_-| = 2\sqrt{b^2 - 3ac}/3a$. Sendo "$L(x_+)$" e "$L(x_-)$" os valores da função lucro associados respectivamente a "x_+" e "x_-". A diferença entre os valores de lucro máximo e mínimo $\Delta L = |L(x_+) - L(x_-)| = 4(b^2 - 3ac)^{3/2}/27a^2$.

Tendo em vista que os máximos e mínimos são apenas locais, sua validade não se estende para todos os valores do parâmetro "x". Os pontos "$\alpha_{\pm}^{(1)}$" associados ao parâmetro "x" que repetem os valores de "$x_{\pm}$" da função lucro são tais que $\left|\alpha_{\pm}^{(1)} - x_{\pm}\right| = (b^2 - 3ac)^{1/2}/a$. Para valores positivos de "a", o lucro máximo local é realmente o ponto de máximo para x < $\alpha_{+}^{(1)}$ e o lucro mínimo local é o ponto de mínimo para x >$\alpha_{-}^{(1)}$. Para valores negativos de "a", o lucro máximo local prevalece sobre os demais valores de L(x) para todo x > $\alpha_{+}^{(1)}$ enquanto que o lucro mínimo local é o menor valor de L(x) para todo valor de x < $\alpha_{-}^{(1)}$.

Adicionando a restrição x > 0, temos que a existência ou não dos pontos de máximo ou mínimo locais estão condicionadas à combinações específicos de "a", "b" e "c" e seus respectivos sinais. Inexistem pontos de máximo e mínimo locais quando os coeficientes "a", "b" e "c" são todos simultaneamente positivos ou negativos ou então "a" e "c" são ambos simultaneamente positivos ou negativos e b = 0. Quando b = c = 0, então $x_+ = x_- = 0$, independentemente se o sinal de “a”.

Existem outras possibilidades envolvendo os coeficientes “a”, “b” e “c” que permitem a existência de apenas de um dos valores de “$x_\pm$”. Desta forma, quando c = 0 e “a” e “b” > 0, então inexiste “x_-” e $x_+ = 0$. De forma análoga, quando c = 0 e “a” e “b” < 0 então inexiste “x_+” e $x_- = 0$. Quando b = 0, a > 0 e c < 0, então $x_+ = \sqrt{3a|c|}/3a$ e inexiste “x_-”. De forma semelhante, a condição b = 0, a < 0 e c > 0, então inexiste “x_+” e $x_- = \sqrt{3|a|c}/3|a|$.

Existem combinações destes coeficientes que apresentam um dos valores de “$x_\pm$” na origem e outro com valor distinto de zero. É o caso c = 0, a > 0 e b < 0, então $x_+ = 2|b|/3a$ e a condição c = 0, a < 0 e b > 0, para $x_- = 2b/3|a|$. Quando a > 0, b > 0 e c < 0, então $x_+ = \left(-b + \sqrt{b^2 + 3a|c|}\right)/3a$ e a condição a < 0, b > 0 e c > 0, produz $x_- = \left(b + \sqrt{b^2 + 3|a|c}\right)/3|a|$. Finalmente, quando a > 0, b < 0 e c > 0, então $x_\pm = \left(|b| \pm \sqrt{b^2 + 3ac}\right)/3a$. De forma semelhante, a condição a < 0, b > 0, c < 0, então $x_\pm = \left(b \mp \sqrt{b^2 + 3ac}\right)/3|a|$.

Os valores de “$\alpha_\pm^{(1)}$”, que são aqueles que apresentam os mesmos valores de $L(x_\pm)$ existirão se existir “$x_\pm$” e quando os valores de “a”, “b” e “c” forem tais que satisfizerem as condições $\alpha_\pm^{(1)} = x_\pm \pm \sqrt{b^2 - 3ac}/a \geq 0$ para valores positivos de “a” e $\alpha_\pm^{(1)} = x_\pm \mp \sqrt{b^2 + 3|a|c}/|a| \geq 0$ para valores negativos de “a”.

REFERÊNCIAS

MATHCENTRE, AC. UK. **Cubic equations**. 2009. Disponível em: <http://www.mathcentre.ac.uk/ resources/uploaded/mc-ty-cubicequations-2009-1.pdf>. Acesso em: 02 out. 2018.

OLIVEIRA, M. Função receita, função lucro e ponto de equilíbrio. **Contabilidade e Matemática para Negócios e Concursos.** 2016. Disponível em < https://www.manoeloliveira. net.br /2016/10/funcao-receita-lucro-e-ponto-de-equilibrio.html>. Acesso em: 02 out. 2018.

SAMPAIO, L. F. B. Gráfico da Função do 3° grau. **GeoGebra**. 2018. Disponível em < https://www.geogebra.org/m/wxQaAP5w>. Acesso em: 03 out. 2018.

SILVA, M. N. P. Matemática na Economia: função custo, função receita e função lucro. **Brasil Escola**. 2018. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/ matematica-na-economia-funcao-custo-funcao-receita-.htm>. Acesso em: 02 out. 2018.

SODRÉ, U. Cálculo: Máximos e Mínimos: Teste da primeira derivada. **Matemática Essencial para o Ensino Superior. 2006.** Disponível em <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/ calculo/maxmin/mm02.htm>. Acesso em: 03 out. 2018.

______. Cálculo: Máximos e mínimos: Teste da segunda derivada. 2006a. **Matemática Essencial para o Ensino Superior.** Disponível em <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/ calculo/maxmin/mm03.htm>. Acesso em: 03 out. 2018.

TAVARES, A. Resolução da equação do 3.º grau (ou cúbica). **Problemas, exercícios, teoria e teoremas de várias áreas, na maioria Cálculo.** 2010. Disponível em <https://problemasteoremas.wordpress.com/2010/05/13/resolucao-da-equacao-do-3-%C2%BA-grau-ou-cubica/>. Acesso em: 03 out. 2018.