INTERVALOS NOTÁVEIS DE FUNÇÕES LUCRO POLINOMIAIS DE 4º GRAU GENÉRICA

INVESTIGATIONS ON GENERIC POLYNOMIAL 4RD ORDER PROFIT FUNCTIONS: RELEVANT INTERVALS OF CRITICAL POINTS AND EQUILIBRIUM POINTS

Diógenes Bosquetti[I]
Alexandre de Souza Fernandes[II]
Péricles Bosquetti[III]
Omar Maluf[IV]
Maurício Angeloni[V]

RESUMO

A função lucro do quarto grau na variável "x" apresenta uma grande gama de comportamentos, podendo apresentar até três pontos críticos, além de quatro pontos de equilíbrio, realizando assim a descrição de comportamentos mais complexos de um determinado produto. Com a construção de cenário mais realista, efeitos, comportamentos, tendências podem ser previstos. Nesse artigo, as variações e distâncias entre os pontos notáveis estão determinados, considerando apenas os valores reais dos pontos críticos e de equilíbrio. Com isso, estratégias para a obtenção de lucros ou de minimização de prejuízos podem ser dimensionados e realizados, evitando cenários desfavoráveis à empresa.

Palavras-chave: Administração. Gestão Financeira. Matemática. Funções. Polinômios.

ABSTRACT

The fourth-degree profit function in the variable "x" presents a wide range of behaviors, with up to three critical points (which may assume local minimum or maximum values as well as inflection). The four equilibrium points (points where the function profit equals to zero), thus performing the description of more complex behaviors of a given product. In this more realistic scenario, effects, behaviors, trends can be predicted. In this article, the variations and distances between the remarkable points are determined, considering only the actual values of these critical and equilibrium points. With this, strategies to obtain profits or to minimize losses can be scaled and realized, avoiding scenarios unfavorable to the company.

Keywords: Administration. Financial management. Mathematics. Functions. Polynomials.

[I] Prof. Pós-Dr. da Supervisão Regional 9: Ribeirão Preto/Franca/Barretos – São Paulo – Brasil. E-mail: diogenes.bosquetti@cps.sp.gov.br
[II] Prof. Me. da Faculdade de Tecnologia (FATEC) de Sertãozinho – São Paulo – Brasil. E-mail: alexandre.fernandes3@fatec.sp.gov.br
[III] Prof. Dr. da Faculdade de Tecnologia (FATEC) de Sertãozinho – São Paulo – Brasil. E-mail: pericles.bosquetti@fatec.sp.gov.br
[IV] Prof. Dr. da Faculdade de Tecnologia (FATEC) de Sertãozinho – São Paulo – Brasil. E-mail: omar.maluf@fatec.sp.gov.br
[V] Prof. Dr. da Faculdade de Tecnologia (FATEC) de Sertãozinho – São Paulo – Brasil. E-mail: mauricio.angeloni@fatec.sp.gov.br

Data de submissão do artigo: 29/06/2019.
Data de aprovação do artigo: 05/09/2019
DOI:

1 INTRODUÇÃO

Em trabalhos anteriores de Bosquetti (*et al*, 2019a), os pontos de equilíbrio de uma função lucro "$L(x)$" polinomial do quarto grau foram obtidos. Nesses pontos, a empresa não apresenta nem lucro, nem prejuízo, sendo uma situação de equilíbrio entre as funções receita e custo. Uma vez que

$$L(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad com\ a \neq 0\,. \tag{1}$$

As constantes "a", "b", "c", "d" e "e" são independentes entre si e também da grandeza "x" sob consideração, os pontos de equilíbrio "x_1", "x_2", "x_3" e "x_4" são dados por:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{2\gamma/\sqrt{\lambda} - \lambda - 2\alpha}\right], \tag{2}$$

$$x_{3,4} = -\frac{b}{4a} + \frac{1}{2}\left[-\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{-2\gamma/\sqrt{\lambda} - \lambda - 2\alpha}\right]. \tag{3}$$

em que definimos as quantidades "α", "γ" e "λ" respectivamente por:

$$\alpha = \frac{c}{a} - \frac{3}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2, \tag{4}$$

$$\gamma = -\frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{d}{a}, \tag{5}$$

$$\lambda = 2\left(\sqrt{-\frac{3}{256}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{a}\right) + \frac{e}{a} + y}\right) - \frac{c}{a} + \frac{3}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2. \tag{6}$$

A grandeza "λ" apresenta em sua estrutura um parâmetro "y", fruto do desenvolvimento matemático adotado para a resolução da equação do quarto grau (CYBERINI, 2018). Tal grandeza é uma das possíveis soluções da equação

$$8y^3 + 4\left(6\sqrt{\beta} - \alpha\right)y^2 + 8\sqrt{\beta}\left(2\sqrt{\beta} - \alpha\right)y - \gamma^2 = 0\ , \tag{7}$$

em que

$$\beta = -\frac{3}{256}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{a}\right) + \frac{e}{a}. \tag{8}$$

Por se tratar de uma equação do terceiro grau, o procedimento proposto por Cardano (*apud* ANDREATINI, 2019) pode ser aplicado, encontrando-se três possíveis soluções "y_1", "y_2" e "y_3" descritas matematicamente por:

$$y_1 = \frac{\alpha}{6} - \sqrt{\beta} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}\,, \tag{9}$$

$$y_2 = \frac{\alpha}{6} - \sqrt{\beta} + \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}\,, \tag{10}$$

$$y_3 = \frac{\alpha}{6} - \sqrt{\beta} - \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}\,. \tag{11}$$

As grandezas "Δ", "q" e "p" são dadas por:

$$\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3\ , \tag{12}$$

$$q = -\frac{1}{8}\gamma^2 + \frac{1}{3}\alpha\beta - \frac{1}{108}\alpha^3\,, \tag{13}$$

$$p = \frac{5}{4}\beta - \frac{3}{4}\alpha\sqrt{\beta} - \frac{1}{48}\alpha^2\,. \tag{14}$$

Tendo em vista que "y" é independente e possibilita ser escolhida uma solução dentre as três possíveis, recomenda-se, de acordo com Bosquetti *et al.* (2018), que se escolha sempre soluções reais e com a menor complexidade possível, evitando assim complicações desnecessárias. Em complementação ao fato, ressalta-se que se $\Delta = q^2/4 + p^3/27 = 0$, haverá três raízes reais como solução da equação de terceiro grau para "y". Caso $\Delta = q^2/4 + p^3/27 < 0$, as raízes "$y_1$", "$y_2$" e "$y_3$" serão reais e distintas entre si. Finalmente, quando $\Delta = q^2/4 + p^3/27 > 0$, a raiz "$y_1$" será real e "$y_2$" e "$y_3$" serão raízes complexas conjugadas.

Outro aspecto igualmente investigado por Bosquetti *et al.* (2019a) em uma função lucro genérica do quarto grau refere-se aos pontos de lucro máximo e mínimo passíveis de ocorrerem para funções dessa ordem polinomial. Aplicando-se a metodologia usual para a obtenção dos mesmos, segundo Sodré (2006a, 2006b), encontramos, na condição para $\Delta = q^2/4 + p^3/27 > 0$, que:

$$x_{c1} = -\frac{b}{4a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}\,, \tag{15}$$

$$x_{c2} = -\frac{b}{4a} - \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}\,, \tag{16}$$

$$x_{c3} = -\frac{b}{4a} - \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}\,. \tag{17}$$

Para esse caso, existirá uma coordenada crítica real "x_{c1}" e duas outras complexas conjugadas "x_{c2}" e "x_{c3}". No caso em que o discriminante $\Delta = 0$, duas situações podem ocorrer: Se as quantidades $p = q = 0$ os pontos críticos serão coincidentes, constituindo-se uma raiz tripla:

$$x_{c1} = x_{c2} = x_{c3} = \frac{b}{4a}\,. \tag{18}$$

Se $\Delta = 0$ porque $q^2/4 = -p^3/27 \neq 0$, temos duas soluções reais (sendo uma raiz simples e outra raiz dupla), a saber:

$$x_{c1} = -\frac{b}{4a} - 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\ , \tag{19}$$

$$x_{c2} = x_{c3} = -\frac{b}{4a} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \ . \tag{20}$$

A condição para $\Delta = q^2/4 + p^3/27 < 0$, implica em três coordenadas críticas reais. Definindo as grandezas "ρ" e "φ" em termos de "p", "q" e "Δ", a saber:

$$\rho^2 = \frac{q^2}{4} - \Delta = \frac{p^3}{27} \ , \tag{21}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} arccos\left[\frac{q^2/4 + \Delta}{q^2/4 - \Delta}\right] = \frac{1}{2} arccos\left[1 + \frac{27q^2}{2p^3}\right] \ . \tag{22}$$

A grandeza "φ" é definida por uma razão no argumento da função trigonométrica inversa (IME/UNICAMP, 2019). As expressões trigonométricas para as coordenadas críticas reais "x_{c1}", "x_{c2}" e "x_{c3}" assumem respectivamente a forma:

$$x_{c1} = -\frac{b}{4a} - 2\rho^{1/3} cos(\varphi/3) \ , \tag{23}$$

$$x_{c2} = -\frac{b}{4a} + 2\rho^{1/3} cos(\pi/3 + \varphi/3) \ , \tag{24}$$

$$x_{c3} = -\frac{b}{4a} + 2\rho^{1/3} cos(\pi/3 - \varphi/3) \ . \tag{25}$$

Os pontos críticos podem ser de máximo, mínimo ou de inflexão, dependendo dos valores assumidos pelos coeficientes "a", "b", "c", "d" e "e". De posse desses resultados, é possível a investigação de intervalos notáveis da função lucro genérica polinomial do quarto grau.

2 AMPLITUDES NOTÁVEIS DA FUNÇÃO LUCRO DO QUARTO GRAU

Nesse trabalho, definiremos por "amplitude" ao intervalo de valores assumidos pela função lucro "$L(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$" com $a \neq 0$, entre dois pontos considerados notáveis em nossa análise matemática. Ressalta-se também que as expressões a serem obtidas são válidas, desde que os pontos críticos e os pontos de equilíbrio satisfaçam as condições de existência para as mesmas e também se enquadrem no intervalo de pontos válidos para a grandeza sob investigação "x".

2.1 Amplitudes entre pontos críticos de uma função lucro do 4º grau

A variação da função lucro do 4º grau entre dois pontos quaisquer "x_1" e "x_2" é descrita simplesmente pela subtração $\Delta L(x) = L(x_2) - L(x_1)$. Tal diferença pode ser explicitamente apresentada como:

$$\Delta L(x) = a(x_2^4 - x_1^4) + b(x_2^3 - x_1^3) + c(x_2^2 - x_1^2) + d(x_2 - x_1) \ . \tag{26}$$

Uma vez que

$$(x_2^4 - x_1^4) = (x_2^2 + x_1^2)(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) \ , \tag{27}$$

$$(x_2^3 - x_1^3) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)\,, \tag{28}$$

a equação para a amplitude pode ser reescrita como

$$\Delta L(x) = (x_2 - x_1)\{(x_2 + x_1)[a(x_2^2 + x_1^2) + c] + b(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + d\}\,. \tag{29}$$

O cálculo da amplitude para dois pontos críticos será realizado apresentando-se os valores encontrados para os termos $(x_2 - x_1)$, $(x_2 + x_1)$, $(x_2^2 + x_1^2)$ e $(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)$.

As expressões matemáticas para os pontos críticos variam, dependendo do valor assumido pelo discriminante $\Delta = q^2/4 + p^3/27$. No caso $\Delta > 0$ existe apenas um ponto crítico real, de forma a não ser possível compará-lo com nenhum outro. Igualmente acontece para o caso em que $\Delta = 0$ e $q = p = 0$. Na condição em que $\Delta = 0$ e $q^2/4 = -p^3/27$, a função lucro apresenta duas raízes distintas, descritas pelas equações (19) e (20). Nessa situação, a expressão para a amplitude "$\Delta L(x) = L(x_{c2}) - L(x_{c1})$" é tal que:

$$x_{c2} - x_{c1} = 3\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3}\,, \tag{30}$$

$$x_{c2} + x_{c1} = -\frac{b}{2a} - \left(\frac{q}{2}\right)^{1/3}\,, \tag{31}$$

$$x_{c2}^2 + x_{c1}^2 = \frac{b^2}{8a^2} + \frac{b}{2a}\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} + 5\left(\frac{q}{2}\right)^{2/3}, \tag{32}$$

$$x_{c2}^2 + x_{c2}x_{c1} + x_{c1}^2 = \frac{3b^2}{16a^2} + \frac{3b}{4a}\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} + 3\left(\frac{q}{2}\right)^{2/3}\,. \tag{33}$$

Na condição $\Delta < 0$, existem três pontos críticos reais e distintos, "x_{c1}", "x_{c2}" e "x_{c3}", respectivamente descritos pelas equações (23), (24) e (25), e exemplificado na Figura 1. Assim sendo, existem três possíveis amplitudes a serem determinadas. A amplitude "$\Delta L(x) = L(x_{c2}) - L(x_{c1})$" é tal que:

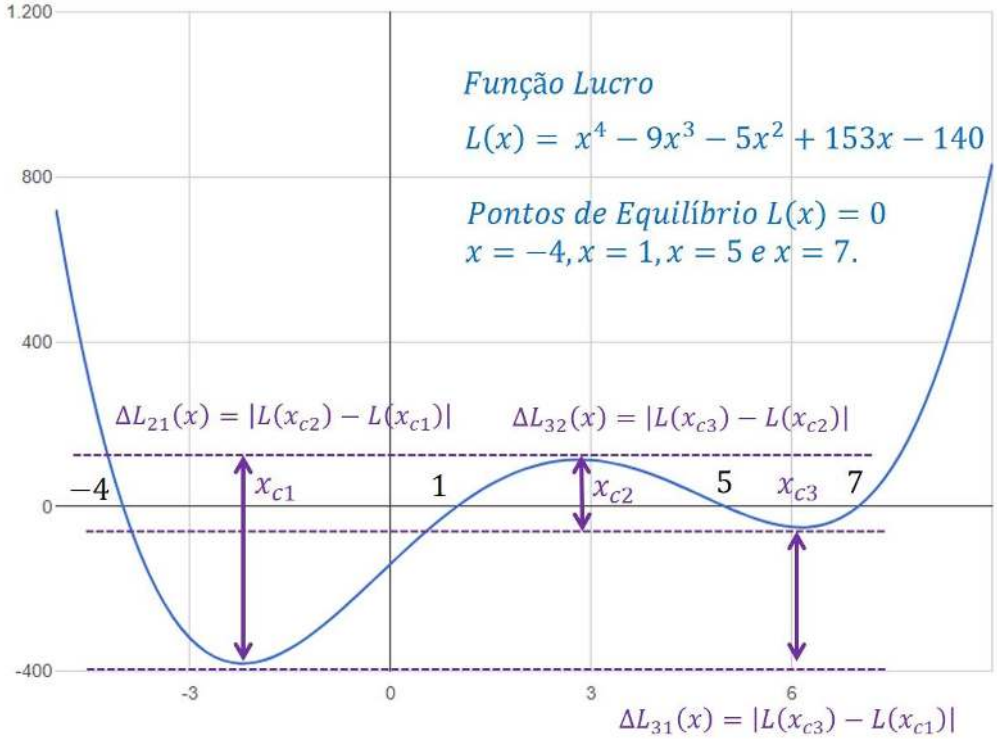
$$x_{c2} - x_{c1} = 2\sqrt{3}\,\rho^{\frac{1}{3}}\,sen\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3}\right), \tag{34}$$

$$x_{c2} + x_{c1} = -\frac{b}{2a} - 2\sqrt{3}\,\rho^{\frac{1}{3}}\,cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3}\right)\,, \tag{35}$$

$$x_{c2}^2 + x_{c1}^2 = \frac{b^2}{8a^2} + \sqrt{3}\frac{b}{a}\,\rho^{\frac{1}{3}}cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3}\right) + \rho^{\frac{2}{3}}\left[3 + 2cos^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) - \sqrt{3}sen\left(\frac{2\varphi}{3}\right)\right]. \tag{36}$$

$$\begin{aligned} x_{c2}^2 + x_{c2}x_{c1} + x_{c1}^2 &= \frac{3b^2}{16a^2} \\ &+ \frac{3\sqrt{3}b}{2a}\rho^{\frac{1}{3}}cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3}\right) + \rho^{\frac{2}{3}}\left[3 + 2cos^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) - \sqrt{3}sen\left(\frac{2\varphi}{3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{37}$$

Figura 1 – Função Lucro do 4º Grau $L(x) = x^4 – 9x^3 – 5x^2 + 153x – 140$, com os pontos de equilíbrio $x_1 = – 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$ e $x_4 = 7$ e também as amplitudes verticais entre os pontos críticos que ocorrem em $x_{c1} = -2,25$, $x_{c2} = 2,75$ e $x_{c3} = 6,25$. Os valores da Função Lucro nestes pontos são: $L(x_{c1}) = –381,418$ (prejuízo), $L(x_{c2}) = 112,957$ (lucro), $L(x_{c3}) = –50,449$ (prejuízo).



Fonte: Gráfico criado pelos autores (2019)
Adaptado do gráfico gerado em http://www.calculadoraonline.com. br/grafica.

De forma similar para os pontos críticos "x_{c1}" e "x_{c3}", a amplitude "$\Delta L(x) = L(x_{c3}) - L(x_{c1})$" é tal que:

$$x_{c3} - x_{c1} = 2\sqrt{3}\,\rho^{\frac{1}{3}}\,sen\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3}\right), \tag{38}$$

$$x_{c3} + x_{c1} = -\frac{b}{2a} - 2\sqrt{3}\,\rho^{\frac{1}{3}}\,cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3}\right), \tag{39}$$

$$x_{c3}^2 + x_{c1}^2 = \frac{b^2}{8a^2} + \sqrt{3}\frac{b}{a}\,\rho^{\frac{1}{3}}cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3}\right) + \rho^{\frac{2}{3}}\left[3 + 2cos^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) + \sqrt{3}sen\left(\frac{2\varphi}{3}\right)\right], \tag{40}$$

$$x_{c3}^2 + x_{c3}x_{c1} + x_{c1}^2 = \frac{3b^2}{16a^2} + \frac{3\sqrt{3}b}{2a}\rho^{\frac{1}{3}}cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3}\right) + 3\,\rho^{\frac{2}{3}}. \tag{41}$$

Finalmente, a amplitude associada aos pontos críticos "x_{c2}" e "x_{c3}", "$\Delta L(x) = L(x_{c3}) - L(x_{c2})$" é tal que:

$$x_{c3} - x_{c2} = -2\,\rho^{\frac{1}{3}}\,cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), \tag{42}$$

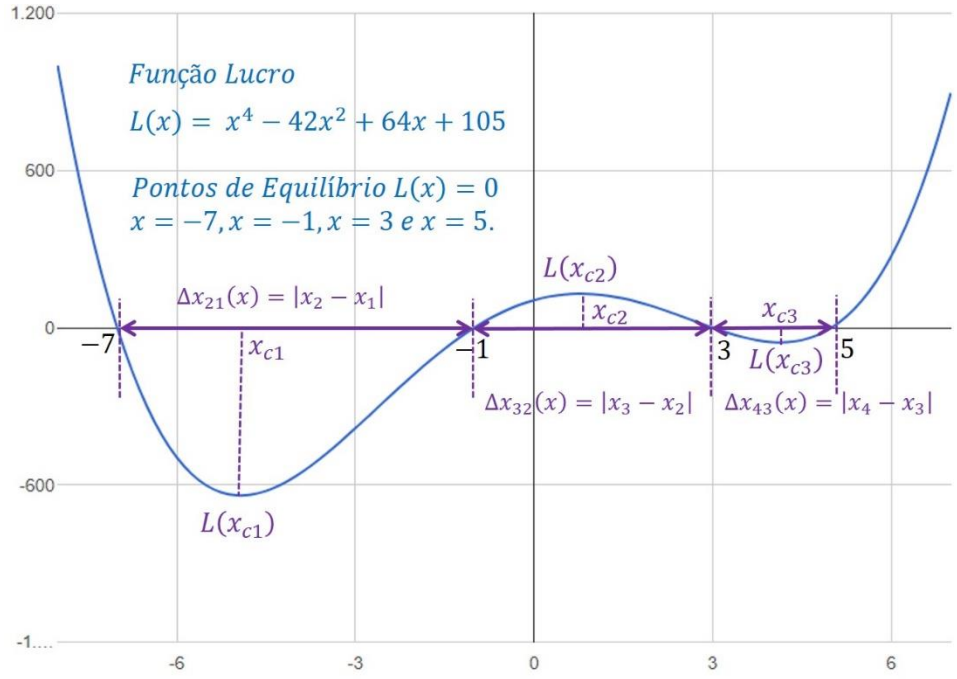
$$x_{c3} + x_{c2} = -\frac{b}{2a} + 2\,\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), \tag{43}$$

$$x_{c3}^2 + x_{c2}^2 = \frac{b^2}{8a^2} - \frac{b}{a}\,\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) + 2\,\rho^{\frac{2}{3}}\left[1 + 2sen^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right], \tag{44}$$

$$x_{c3}^2 + x_{c3}x_{c2} + x_{c2}^2 = \frac{3b^2}{16a^2} - \frac{3b}{2a}\,\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) + 3\,\rho^{\frac{2}{3}}. \tag{45}$$

Nesses casos, "$\Delta L(x)$" apresenta as possíveis amplitudes, decorrentes da diferença de valores de "$L(x)$" nos respectivos pontos críticos.

Figura 2 – Função Lucro do 4º Grau L(x) = x⁴ – 42x² + 64x + 105, com os pontos de equilíbrio x₁ = – 7, x₂ = –1, x₃ = 3 e x₄ = 5 e também as amplitudes horizontais entre esses pontos. Também estão ressaltados os pontos críticos que ocorrem em x_{c1} = -5, x_{c2} = 0,75 e x_{c3} = 4,25. Os valores da Função Lucro nesses pontos são: $L(x_{c1})$ = –640 (prejuízo), $L(x_{c2})$ = 129,691 (lucro), $L(x_{c3})$ = –55,371 (prejuízo).



Fonte: Gráfico criado pelos autores (2019)
Adaptado do gráfico gerado em http://www.calculadoraonline.com. br/grafica.

2.2 Amplitudes entre um ponto crítico e um ponto de equilíbrio de uma função lucro do 4º grau

As amplitudes associadas às diferenças de valores da função lucro "$L(x)$" entre um ponto crítico e um ponto de equilíbrio apresentam formulação matemática mais simples, uma vez que o valor da função lucro no ponto de equilíbrio se anula, ou seja, $L(x_{ponto\ de\ equilíbrio}) = 0$. A amplitude de variação de valores é tal que:

$$\Delta L(x) = L(x) - L\left(x_{ponto\ de\ equilíbrio}\right) = ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e. \quad (46)$$

Os valores das amplitudes entre pontos críticos e pontos de equilíbrio são obtidos simplesmente substituindo-se respectivamente as expressões matemáticas das grandezas dos pontos críticos "$x = x_{c1}$", "$x = x_{c2}$" ou "$x = x_{c3}$" na equação anterior.

3 INTERVALOS DE VALORES MONÓTONOS E NÃO MONÓTONOS DA FUNÇÃO LUCRO

Essa seção destina-se a apresentar os intervalos de valores horizontais entre pontos de equilíbrio, e entre pontos críticos de uma função de lucro do 4º grau, conforme Bosquetti *et al.* (2019b).

3.1 Intervalo de valores horizontais entre pontos de equilíbrio de uma função lucro do 4º grau

Tendo em vista que a função lucro "$L(x)$" do quarto grau permite assumir valores para seus coeficientes "a", "b", "c", "d" e "e" tais que a função pode apresentar nenhuma, uma, duas, três ou quatro raízes reais, e, nesses casos, cortar o eixo das abscissas, a distância entre tais pontos pode ser obtida genericamente, sendo um intervalo notável da referida função. Para tanto, apresentamos as condições de existência para que as raízes "x_1", "x_2", "x_3" e "x_4", que são os pontos de equilíbrio de "$L(x)$" sejam reais:

Condição "x_1" e "x_2" reais: $\lambda \geq 0$, e $2\gamma - \lambda^{3/2} - 2\alpha\lambda^{1/2} \geq 0$. (47)

Condição "x_3" e "x_4" reais: $\lambda \geq 0$, e $2\gamma + \lambda^{3/2} + 2\alpha\lambda^{1/2} \leq 0$. (48)

Considerando que as expressões matemáticas para a posição dos pontos de equilíbrio real sejam dadas pelas equações (2) e (3), as expressões para os intervalos de valores $\Delta x_{ab} = x_b - x_a$, em que "$x_a$" e "$x_b$" são denominações genéricas das possíveis raízes da equação do quarto grau, temos:

$$\Delta x_{12} = |x_1 - x_2| = \sqrt{2\gamma/\sqrt{\lambda} - \lambda - 2\alpha}\,, \quad (49)$$

$$\Delta x_{13} = |x_1 - x_3| = \left|\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2}\left[\sqrt{2\gamma/\sqrt{\lambda} - \lambda - 2\alpha} - \sqrt{-2\gamma/\sqrt{\lambda} - \lambda - 2\alpha}\right]\right|, \quad (50)$$

$$\Delta x_{14} = |x_1 - x_4| = \sqrt{\lambda} + \frac{1}{2}\left[\sqrt{2\gamma/\sqrt{\lambda} - \lambda - 2\alpha} + \sqrt{-2\gamma/\sqrt{\lambda} - \lambda - 2\alpha}\right], \quad (51)$$

$$\Delta x_{23} = |x_2 - x_3| = \left|\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\left[\sqrt{2\gamma/\sqrt{\lambda} - \lambda - 2\alpha} + \sqrt{-2\gamma/\sqrt{\lambda} - \lambda - 2\alpha}\right]\right|, \quad (52)$$

$$\Delta x_{24} = |x_2 - x_4| = \left|\sqrt{\lambda} - \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2\gamma/\sqrt{\lambda} - \lambda - 2\alpha} - \sqrt{-2\gamma/\sqrt{\lambda} - \lambda - 2\alpha}\right]\right|, \quad (53)$$

$$\Delta x_{34} = |x_3 - x_4| = \sqrt{-2\gamma/\sqrt{\lambda} - \lambda - 2\alpha}\,. \tag{54}$$

O módulo aparece nas subtrações para garantir que tal quantidade seja sempre maior ou igual a zero. Uma exemplificação dessas variações verticais pode ser vista na Figura 2, apresentada anteriormente.

De acordo com Bortolossi (2016), uma função é estritamente crescente se, em um dado intervalo de valores da grandeza "x", ser satisfeita a condição "$L(x_\alpha) < L(x_\beta)$" quando $x_\alpha < x_\beta$. Por outro lado, a função é estritamente decrescente em outro intervalo de valores se ocorrer que "$L(x_\alpha) > L(x_\beta)$" quando $x_\alpha < x_\beta$. Tendo em vista que a função de quarto grau apresenta pontos de máximos e mínimos, haverá um intervalo de valores "Δx", em que a função lucro não será necessariamente nem estritamente crescente, nem estritamente decrescente. O intervalo estará limitado aos valores das raízes "x_1", "x_2", "x_3" e "x_4", se as mesmas existirem. Dessa forma, o limite inferior de "Δx" acontecerá no menor valor da raiz real enquanto o limite superior, o maior valor real entre as raízes da função lucro, ou seja:

$$\Delta x = [min(x_1, x_2, x_3, x_4), máx(x_1, x_2, x_3, x_4)]\,. \tag{55}$$

Se não existirem valores reais o intervalo é nulo.

3.2 Intervalo de valores horizontais entre pontos críticos de uma função lucro do 4º Grau

Análise semelhante à da subseção anterior pode ser realizada para as distâncias entre os pontos críticos "x_{c1}", "x_{c2}" e "x_{c3}". A quantidade de pontos críticos reais está diretamente relacionada com o sinal do discriminante "Δ". Assim sendo, haverá dois pontos críticos reais se "$\Delta = 0$", e ainda na condição $q^2/4 = -p^3/27 \neq 0$. Tais coordenadas estão matematicamente descritas pelas equações (19) e (20), de modo que a distância entre as mesmas será:

$$\Delta x_{c12} = |x_{c2} - x_{c1}| = 3\left|\left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right|\,. \tag{56}$$

Caso $\Delta < 0$, as raízes "x_{c1}", "x_{c2}" e "x_{c3}" são reais e distintas entre si, de modo que as distâncias entre tais coordenadas são matematicamente descritas como:

$$\Delta x_{c12} = |x_{c2} - x_{c1}| = \left|2\rho^{1/3}\left[cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right) + cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right]\right|. \tag{57}$$

Utilizando a expressão para a soma de cossenos de distintos argumentos "θ_1" e "θ_2" (RIGONATTO, 2019):

$$cos(\theta_1) + cos(\theta_2) = 2\,cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right), \tag{58}$$

temos

$$\Delta x_{c12} = |x_{c2} - x_{c1}| = 2\sqrt{3}\left|\rho^{1/3}cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right|. \tag{59}$$

Fazendo análise semelhante na determinação de uma expressão matemática genérica para a distância entre as raízes "x_{c1}" e "x_{c3}", temos:

$$\Delta x_{c13} = |x_{c3} - x_{c1}| = \left|2\rho^{1/3}\left[cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right) + cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right]\right|. \quad (60)$$

Utilizando-se a expressão para a soma de cossenos como no caso anterior, obtém-se que:

$$\Delta x_{c13} = |x_{c3} - x_{c1}| = 2\sqrt{3}\left|\rho^{1/3} cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right|. \quad (61)$$

Portanto, as distâncias horizontais entre "x_{c1}" e "x_{c3}" e "x_{c1}" e "x_{c2}", são matematicamente idênticas $\left|x_{c3} - x_{c1}\right| = \left|x_{c2} - x_{c1}\right|$. Finalmente, o intervalo horizontal associado às distâncias entre as coordenadas "x_{c2}" e "x_{c3}" é tal que:

$$\Delta x_{c32} = |x_{c3} - x_{c2}| = \left|2\rho^{1/3}[cos(\pi/3 - \varphi/3) + cos(\pi/3 + \varphi/3)]\right|, \quad (62)$$

ou, de forma equivalente

$$\Delta x_{c23} = |x_{c3} - x_{c2}| = 2\left|\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right|. \quad (63)$$

4 DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

A introdução de novas potências inteiras da grandeza "x" na função lucro "$L(x)$" faz com que novos comportamentos, aspectos e fatores possam ser levados em consideração ao longo do comportamento de mercado. Tendo em vista a abrangência desse estudo realizado, diversas possibilidades de comportamentos podem existir, dependendo da combinação dos valores dos coeficientes independentes de "x", os quais multiplicam as potências dessa grandeza, "a", "b", "c", "d" e "e".

Os Pontos de Máximo e Mínimo ou de Inflexão ocorrerão dependendo de condições explicitadas no discriminante $\Delta = q^2/4 + p^3/27$, o qual pode assumir valores positivos, negativos ou nulos, promovendo a existência de um, dois ou três pontos críticos "x_{c1}", "x_{c2}" e "x_{c3}" reais para intervalos de valores desse discriminante. Já a existência dos pontos de equilíbrio "x_1", "x_2", "x_3" e "x_4", consideradas raízes da equação de quarto grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, está associada a uma série de condições descritas pela emergência de fatores reais nas expressões das raízes quadradas associados a esses pontos de equilíbrio.

Nesse trabalho, realizamos um estudo sobre os intervalos notáveis, associados às diferenças dos valores obtidos nos pontos de equilíbrio e também nos críticos, encontrando expressões genéricas e válidas para qualquer função lucro do quarto grau que apresente raízes reais. Os valores complexos foram desprezados por não apresentar significado financeiro, não existindo o ponto, na prática. As distâncias entre os valores assumidos pela função lucro nos pontos críticos "$\Delta L(x)$" foram obtidas considerando-se todas as possibilidades para "x_{c1}", "x_{c2}" e "x_{c3}". Da mesma forma, as distâncias entre as coordenadas associadas aos pontos de equilíbrio "x_1", "x_2", "x_3" e "x_4" foram apresentadas, respeitando-se as condições de sua existência. Através dessas expressões é possível traçar estratégias para evitar perdas, maximizar lucros, apresentar taxas de crescimento favoráveis principalmente na região onde a função varia, ou seja, não é monotônica, algo que deve chamar atenção daqueles investidores, donos de empresa ou funcionários associados ao setor financeiro da corporação, evitando que ocorram prejuízos severos e que possam pôr em cheque toda a atividade econômica da empresa.

REFERÊNCIAS

ANDREATINI, A. **A solução das equações de 3º e 4º grau cardano e tartaglia.** 2019. Disponível em: http://www.andreatini.com.br/cardano.htm. Acesso em 22 jun. 2019.

BORTOLOSSI, J. H. **Pré-cálculo – Parte III.** 2016. Disponível em: http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/disciplinas/2016.2/gma00116/arquivos/gma00116-slides-03.pdf. Acesso em: 10 jul. 2019.

BOSQUETTI, D. *et al*. **Investigações sobre funções lucro de 3º grau genérica: pontos de equilíbrio e de lucros máximo e mínimo.** 2018. Disponível em: http://sitefa.fatecsertãozinho.edu.br/index.php/sitefa/article/view/17/27. Acesso em: 4 jul. 2019.

_____ Investigações sobre pontos de equilíbrio de funções lucro polinomiais de 4º Grau Genérica. 2019a. Artigo Submetido ao **II Simpósio de Tecnologia da Faculdade de Tecnologia de Sertãozinho (II SITEFA)**. Site do Evento a ser consultado após aprovação: Disponível em: http://sitefa.fatecsertaozinho.edu.br/index.php/sitefa/issue/view/2.

_____ Investigações sobre Pontos de Máximo e Mínimo de Funções Lucro Polinomiais de 4º Grau genérica. 2019b. **Artigo Submetido ao II Simpósio de Tecnologia da Faculdade de Tecnologia de Sertãozinho (II SITEFA).** Site do Evento a ser consultado após aprovação: Disponível em: http://sitefa.fatecsertaozinho.edu.br/index.php/sitefa/issue/view/2.

CYBERINI, F. H. **Algoritmo da equação do quarto Grau.** 2018. Disponível em: https://www.blogcyberini.com/2018/06/algoritmo-equacao-quarto-grau.html. Acesso em: 5 jul. 2019.

IME/UNICAMP. **Funções trigonométricas inversas**. 2019. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~js/trighip.pdf. Acesso em: 6 jul. 2019.

RIGONATTO, M. Fórmulas de Transformação de Soma em Produto. In: **Brasil Escola**, 2019. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/formulas-transformacao-soma-produto.htm. Acesso em: 6 jul. 2019.

SODRÉ, U. **Ensino superior: cálculo: máximos e mínimos: teste da primeira derivada.** 2006a. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/calculo/maxmin/mm02.htm. Acesso em: 18 jun. 2019.

_____ **Ensino superior: cálculo: máximos e mínimos: teste da segunda derivada.** 2006b. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/calculo/maxmin/mm03.htm. Acesso em: 18 jun. 2019.